

## I тур категорії Z5

Z5–I–1

На лузі було 45 овець і кілька пастухів. Після того, як половина пастухів і третина овець пішли, решта пастухів і овець мали загалом 126 ніг. Слід зазначити, що кількість ніг у всіх овець і пастухів є звичайне. Скільки пастухів було спочатку на лузі?

(L. Hozová)

Z5–I–2

Марта грає в гру, в якій вона вгадує п'ятизначне число, яке складається з різних цифр. Хід перших трьох турів виглядає так:

Obrazek

Колір коробки розкриває дещо про число, яке в ній міститься:

- зелений квадрат означає, що цифра зустрічається у вгаданому числі у тому самому місці;
- жовтий квадрат означає, що цифра зустрічається у вгаданому числі, але в іншому місці;
- сірий квадрат означає, що цифра не входить у вгадане число.

Поясніть, зможе чи не зможе Марта точно вгадати число в наступному турі?

(Дж. Уівер)

Z5–I–3

У квадратній сітці намальовано трикутник, вершини якого є вузлами сітки:

Obrazek

Намалюйте чотири різні (взаємно неконгруентні) багатокутники з подвійним периметром на достатньо розширеній сітці.

(E. Novotná)

Z5–I–4

У Миколи було одне тризначне і одне двозначне число. Кожне з цих чисел складалося з різних цифр. Різниця чисел Ніколь була 976. Яка їх сума?

(L. Hozová)

Z5–I–5

Три жаби навчилися стрибати по драбині. Кожна з них може стрибати як вгору, так і вниз, але лише на певну кількість сходинок. Жаби починають з землі, і кожна хоче дістатися до своєї улюбленої сходинки:

- мале жабеня може перестрибнути 2-3 сходинки і хоче дістатися до сьомої;
- середня жаба може перестрибнути 2 або 4 сходинки і хоче дістатися до першої сходинки;
- велика жаба може перестрибнути 6 або 9 сходинок і хоче дістатися до третьої сходинки.

Для кожної з жаб доведіть, чи зможе вона виконати своє бажання. Якщо так, опишіть як. Якщо ні, поясніть чому.

(V. Hucíková)

Z5-I-6

Джиндра збирає кубики, всі однакового розміру. Вчора вона знайшла коробку, в яку почала складати кубики. Одним шаром кубиків їй вдалося точно викласти квадратне дно. Таким же чином вона виклала ще п'ять шарів, але на півдорозі наступного шару у неї закінчилися кубики. Сьогодні Джиндра отримав від бабусі ще 18 кубиків, саме стільки, скільки їй потрібно, щоб завершити цей шар.

Скільки кубиків було у Джиндри вчора?

(M. Petrová)

## I тур категорії Z6

Z6-I-1

Пан Шпачек був відомим птахівником. Загалом у нього було більш ніж 50 і менш ніж 100 птахів. Папуги становили дев'яту частину, а канарки – чверть. Скільки птахів тримав пан Шпачек?

(L. Hozová)

Z6-I-2

Вацлав помножив два тризначних числа звичайним письмовим способом. Він переконався, що результат правильний, і відклав свій розрахунок. Через деякий час йому потрібно було використати результат. Він знайшов свій попередній розрахунок, але багато чисел були настільки розмитими, що їх неможливо було прочитати (зірочки замінили нечитабельні цифри):

Obrazek

Вацлав вже не пам'ятав, які числа він перемножив, але все одно зміг визначити їхній добуток. Який результат він отримав?

(L. Hozová)

Z6-I-3

Магда вирізала два однакові рівнобедрені трикутники, кожен з периметром 100 см. Спочатку вона склала ці трикутники у чотирикутник, з'єднавши їх гранями. Потім вона склала їх у чотирикутник, з'єднавши їх основами. У першому випадку вона отримала чотирикутник, периметр якого на 4 см менший, ніж у другому. Визначте довжини сторін вирізаних трикутників.

Obrazek

(E. Semerádová)

Z6-I-4

Сім гномів народилися в один день протягом семи років поспіль. Сума віку трьох наймолодших гномів склала 42 роки. Коли один гном пішов із Білосніжкою по воду, інші гноми з'ясували, що їхній середній вік є такий самий, як середній вік усіх семи гномів. Скільки років було гномові, який пішов із Білосніжкою по воду?

(L. Hozová)

Z6-I-5

Пет і Мет тринувалися в рахунок. У квадратній сітці, орієнтованій за сторонами світу, вони записали наступні арифметичні операції зсуву на один квадрат:

- при русі на північ (S) додали сім;
- при русі на схід (V) відняли чотири;
- при русі на південь (J) розділили на два;
- при русі на захід (Z) помножили на три.

Наприклад коли Мет дав Пет номер 5 і маршрут S–V–J, вони отримали 4 при правильному розрахунку.

Яке число дав Пет Мету, якщо маршрут S–V–J–Z–Z–J–V–S дав число 57 при правильному розрахунку?

(M. Petrová)

Z6–I–6

У Бориса є дивний цифровий годинник. Він показує правильний час, але замість годин і хвилин він показує дві інші цифри: перша – це числова сума цифр, які були б на дисплеї за звичайних обставин, друга – сума годин і хвилин (наприклад, у 7:30 вони показують 10:37).

Яка може бути година, коли годинник Бориса показує 6:15? Вкажіть усі варіанти.

(M. Dillingerová)

I тур категорії Z7

Z7–I–1

Середній вік дідуся, бабусі та їхніх п'ятьох онуків 26 років. Середній вік самих онуків 7 років. Бабуся на рік молодша за дідуся. Скільки років бабусі?

(L. Hozová)

Z7–I–2

Дано два рівні рівносторонні трикутники ABC і BDE такі, що точки A, B і D лежать на одній прямій, а точки C і E лежать в одній півплощині, яка визначена цією прямою. Перетин CD і AE позначено F. Визначте величину кута AFD.

(I. Jančigová)

Obrazek

Z7–I–3

Переступне число – це натуральне число, в записі якого;

- кожна ненульова цифра використовується рівно двічі,
- між двома однаковими ненульовими цифрами рівно стільки нулів, скільки є значення цих цифр.

Прикладами переступних чисел є, наприклад, 40001041 або 300103100.

Скільки існує семизначних переступних чисел, запис яких містить тільки одиниці, двійки та нулі?

(M. Papšo)

Z7–I–4

Джард написав послідовність наступних складових:

ZU ZA NA NE LA LU CI SA MU EL

Він захотів замінити літери цифрами від 0 до 9 так, щоб різним буквам відповідали різні числа і щоб (у заданому порядку) була зростаюча послідовність двозначних чисел.

Вкажіть можливе рішення Джарда або поясніть, що це неможливо.

(J. Zhouf )

Z7–I–5

На малюнку зображено квадрати ABCD, EFCA, GHCE і IJHE. Точки S, B, F і G є відповідно центрами цих квадратів. Відрізок AC дорівнює 1 см. Визначте площу трикутника IJS.

(E. Semerádová)

Obrazek

Z7–I–6

Єва задумала два натуральних числа. Вона спочатку правильно додала числа, потім відняла їх. В обох випадках вона отримала двозначний результат. Добуток отриманих двоцифрових чисел дорівнював 645.

Які числа задумала Єва?

(E. Novotná)

## I тур категорії Z8

Z8–I–1

Дано три різні числа. Середнє значення середнього двох менших чисел і середнього двох більших чисел дорівнює середньому значенню всіх трьох чисел. Середнє найменшого та найбільшого чисел дорівнює 2022.

Визначте суму цих трьох чисел.

(K. Pazourek)

Z8–I–2

Чотирикутник ABCD являє собою ромб зі стороною 6 см і висотою 4 см. Точка E – середина сторони AD, точка G – середина сторони BC, точка F – точка перетину прямих AG і BE, точка H – точка перетину прямих CE і DG.

Визначте площу чотирикутника EFGH.

(K. Pazourek)

Z8–I–3

Для послідовності чисел, що починається з

1, 3, 4, 7, 11, 18, . . .

виконується умова, що кожне число, починаючи з третього, є сумою двох попередніх.

Якою цифрою закінчується число 2023 у цій послідовності?

(J. Mazák)

Z8–I–4

Чтибор позначив квадратну ділянку землі на карті масштабу 1:50000 і підрахував, що її сторона фактично дорівнює 1 км. Він зменшив карту на копіювальному пристрої так, що позначений квадрат був на  $1,44 \text{ см}^2$  меншим, ніж спочатку.

Чому дорівнює масштаб зменшеної карти?

(M. Petrová)

Z8–I–5

Петра записала натуральні числа від 1 до 9. Вона додала два з цих чисел, вилучила їх і записала отриману суму замість вилучених чисел. Таким чином, вона записала вісім чисел, які їй вдалося розділити на дві групи з однаковим добутком.

Визначте, яким може бути цей добуток.

(E. Novotná)

Z8–I–6

Дано прямокутник ABCD і точки E, F такі, що трикутники BEC і CFD рівносторонні і кожен з них має лише одну спільну сторону з прямокутником ABCD.

Обґрунтуйте, що трикутник AEF також рівносторонній.

(J. Švrček)

## I тур категорії Z9

Z9–I–1

Арифметична послідовність – це послідовність чисел, у якій результат віднімання кожного числа від попереднього завжди однаковий; цей результат називають різницею. (Наприклад, 2, 8, 14, 20, 26, 32 – це арифметична послідовність з різницею 6)

Болек і Льолек мали кожен свою арифметичну послідовність. Послідовності як Боліка, так і Льоліка починалися з числа 2023 і закінчувалися числом 3023. Ці дві послідовності мали 26 спільних чисел. Співвідношення різниць Боліка та Льоліка було 5:2.

Визначте відмінність між різницею Боліка та різницею Льоліка.

(E. Novotná)

Z9–I–2

Дани два рівні рівносторонні трикутники ABC і BDE, у яких розмір кута ABD більший ніж  $120^\circ$  і менший ніж  $180^\circ$ , а точки C і E лежать у одній півплощині, що визначена прямою AD. Перетин CD і AE позначено F.

Визначте величину кута AFD.

(I. Jančigová)

Obrazek

Z9–I–3

Три маги закликають числами, але кожен може зробити лише одне заклинання:

- перший маг може від будь-якого числа відняти одиницю;
- другий маг може поділити будь-яке число на два;
- третій маг може будь-яке число помножити на три.

Маги можуть по черзі заклинати за бажанням, але кожен може використати своє заклинання не більше п'яти разів за одну дію, і жоден проміжний результат не може бути більшим за 10. Під час однієї дії вони повинні натиснути п'ять трійок із п'яти цифр 3, 8, 9, 2, 4, а в іншому представлені з цих же п'яти чисел потрібно натиснути п'ять п'ятірок.

Як вони змогли впоратися з проблемою? Знайдіть можливі рішення або поясніть, чому це неможливо.

(E. Novotná)

Z9–I–4

Знайдіть найменші позитивні цілі числа  $a$  і  $b$ , для яких

$$7a^3 = 11b^5$$

(A. Bohiniková)

Z9–I–5

На ринку мрій Сфінкс запропонував мандрівникові сім ілюзій, дві дрімоти та один кошмар за чотири мрії. Іншому мандрівнику той самий Сфінкс запропонував чотири ілюзії, чотири дрімоти та два кошмари за сім мрій. Сфінкс завжди пропонує однаково для всіх мандрівників. Скільки ілюзій варта одна мрія?

(K. Pazourek)

Z9–I–6

Вершини квадрата ABCD з'єднані ломаною лінією DEFGHB. Менші кути при вершинах E, F, G, H – прямі, а відрізки DE, EF, FG, GH, HB дорівнюють відповідно 6 см, 4 см, 4 см, 1 см, 2 см. Визначте площу квадрата ABCD.

(M. Dillingerová)

Obrazek