Didaktický test 10

1 **Vypočtěte druhou mocninu podílu nejmenšího společného násobku čísel 78 a 52 a rozdílu těchto čísel.**

$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$
$52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$

$n(78; 52) = 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 = 156$

$$\left(\frac{156}{78-52}\right)^2 = \left(\frac{156}{26}\right)^2 = 6^2 = \mathbf{36}$$

2 **Vypočtěte a výsledek vyjádřete desetinným číslem.** /Operace s čísly, s. 12/ ı

2.1 $$\sqrt{3 \cdot \left[(0{,}7-1) \cdot \left(\sqrt{2{,}25} - 0{,}7 - \frac{3}{4} \cdot 3{,}2\right)\right]} = \sqrt{3 \cdot [-0{,}3 \cdot (1{,}5 - 0{,}7 - 2{,}4)]} = \sqrt{3 \cdot [-0{,}3 \cdot (-1{,}6)]} = \\ = \sqrt{3 \cdot 0{,}48} = \sqrt{1{,}44} = \mathbf{1{,}2}$$

2.2 $$\sqrt{28\,900 - 6\,400} : 10 + 0{,}7 \cdot \sqrt{0{,}49} \cdot 10 = \sqrt{22\,500} : 10 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 10 = 150 : 10 + 0{,}49 \cdot 10 = \\ = 15 + 4{,}9 = \mathbf{19{,}9}$$

3 **Vypočtěte a výsledek zapište jako celé číslo nebo zlomek v základním tvaru.** /Operace s čísly, s. 12/ **max.**

3.1 $$\frac{\frac{7}{12} : \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{3}\right)}{\frac{3}{11} - \frac{1}{6} \cdot 1{,}5} = \frac{\frac{7}{12} : \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{3}\right)}{\frac{3}{11} - \frac{1}{6} \cdot 1{,}5} = \frac{\frac{7}{12} : \frac{9-20}{15}}{\frac{3}{11} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{12} \cdot \left(\frac{15}{-11}\right)}{\frac{12-11}{44}} = \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{44}{1} = \left(-\frac{35}{44}\right) \cdot \frac{44}{1} = \mathbf{-35}$$

3.2 $$1 - \frac{2 - \frac{3}{4+5}}{2 + \frac{3}{4-5}} = 1 - \frac{\frac{18}{9} - \frac{3}{9}}{2-3} = 1 - \frac{\frac{15}{9}}{-1} = 1 + \frac{15}{9} = \frac{9+15}{9} = \frac{24}{9} = \mathbf{\frac{8}{3}}$$

4 **Zjednodušte:** /Operace s algebraickými výrazy, s. 16/ **ma**
(Výsledný výraz nesmí obsahovat závorky ani zlomky.)

4.1 $$-(n-0{,}1) \cdot (n+0{,}1) + n \cdot (n-1) - 0{,}01 \cdot (1 - 100n) = \\ = -\left(n^2 - 0{,}01\right) + n^2 - n - 0{,}01 + n = -n^2 + 0{,}01 + n^2 - n - 0{,}01 + n = \mathbf{0}$$

4.2 $$(m+4)^2 - \left[(2m+3)^2 - 3m \cdot (m+4) + 7\right] = \\ = m^2 + 8m + 16 - \left(4m^2 + 12m + 9 - 3m^2 - 12m + 7\right) = m^2 + 8m + 16 - m^2 - 16 = \mathbf{8m}$$

5 Řešte rovnici:

/Lineární rovnice, s. 19/ **max. 4**

5.1 $5-\frac{7x-3}{5}=\frac{5x-2}{6}-3 \qquad |\cdot 30$

$150-6\cdot(7x-3)=5\cdot(5x-2)-90$

$150-42x+18=25x-10-90$

$-67x=-268$

$x=\frac{-268}{-67}$

$\mathbf{x=4}$

5.2 $(0{,}5\cdot x)^2-\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2=\frac{3}{4}\cdot(x-8)+5$

$0{,}25x^2-0{,}25x^2-x-1=0{,}75x-6+5$

$-1{,}75x=-1+1$

$-1{,}75x=0$

$\mathbf{x=0}$

Průměrná výška pěti dětí je 120 cm.
Průměrná výška tří nejvyšších dětí je 130 cm.
Nejmenší dítě je o 12 cm menší než čtvrté dítě v pořadí od nejvyššího po nejmenší.
Nejvyšší dítě je o $\frac{1}{3}$ vyšší než dítě nejmenší.

6

/Slovní úlohy, s. 21/ **max. 4 body**

6.1 Vypočtěte v cm průměrnou výšku posledních dvou dětí v pořadí od nejvyššího po nejmenší.

$5\cdot 120\ \text{cm}=600\ \text{cm}$

$3\cdot 130\ \text{cm}=390\ \text{cm}$

$(600-390)\ \text{cm}=210\ \text{cm}$

$(210:2)\ \text{cm}=105\ \text{cm}$

Průměrná výška posledních dvou dětí v pořadí od největšího po nejmenší je **105 cm**.

6.2 Vypočtěte v cm výšku nejmenšího dítěte.

x .... výška nejmenšího dítěte

$x+(x+12)=210$

$2x=198$

$x=99\ \text{cm}$

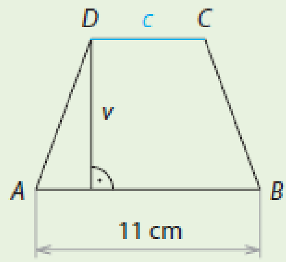
Nejmenší dítě má výšku **99 cm.**

6.3 Vypočtěte v cm výšku nejvyššího dítěte.

$\frac{4}{3}x=\frac{4}{3}\cdot 99\ \text{cm}=4\cdot 33\ \text{cm}=132\ \text{cm}$

Nejvyšší dítě má výšku **132 cm.**

Lichoběžník *ABCD* má obsah 50 cm^2.
Zmenšíme-li jeho výšku o 1 cm a délky základen zachováme, zmenší se celý obsah o 20 %.



7 /Rovinné útvary, s. 49/ **max. 3 body**

Ze vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku dostaneme soustavu rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme srovnávací metodou:

$$\frac{(11+c)\cdot v}{2}=50$$
$$\frac{(11+c)\cdot(v-1)}{2}=40$$

$$(11+c)\cdot v=100 \Rightarrow 11+c=\frac{100}{v}$$
$$(11+c)\cdot(v-1)=80 \Rightarrow 11+c=\frac{80}{v-1}$$

$$\frac{100}{v}=\frac{80}{v-1}$$
$$100v-100=80v$$
$$20v=100$$
$$v=5\text{ cm}$$

$$c=\frac{100}{v}-11=\left(\frac{100}{5}-11\right)\text{cm}=$$
$$=(20-11)\text{ cm}=9\text{ cm}$$

7.1 Vypočtěte v cm délku základny *CD* lichoběžníku.

$\mathbf{c=9\text{ cm}}$

7.2 Vypočtěte v cm délku výšky původního lichoběžníku.

$\mathbf{v=5\text{ cm}}$

8 Doplňte do rámečků čísla tak, aby platila rovnost: /Převody jednotek, s.

8.1 $250°30'-6\cdot\left(\boxed{18}°\,\boxed{47}'\right)=137°48'$

$(250°30'-137°48'):6=(249°90'-137°48'):6=112°42':6=108°282':6=\mathbf{18°47'}$

8.2 $5\text{ m/s}+12\text{ km/h}=\boxed{30}\text{ km/h}$

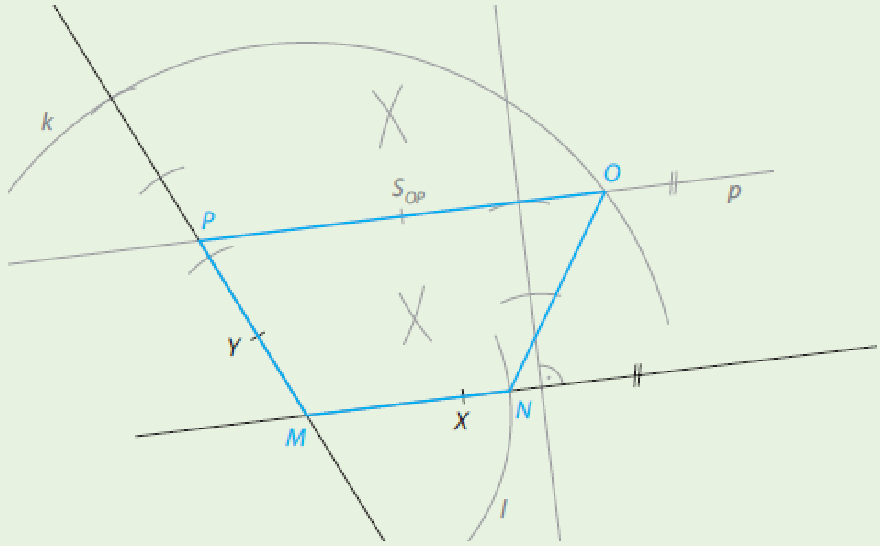
$5\text{ m/s}=5\cdot3{,}6\text{ km/h}=18\text{ km/h}$
$18\text{ km/h}+12\text{ km/h}=\mathbf{30}\text{ km/h}$

8.3 $7\cdot\boxed{0{,}6}\text{ l}+1200\text{ cm}^3+3\cdot0{,}15\text{ m}^3=455{,}4\text{ dm}^3$

$455{,}4\text{ dm}^3-1\,200\text{ cm}^3-3\cdot150\text{ dm}^3=455{,}4\text{ dm}^3-1{,}2\text{ dm}^3-450\text{ dm}^3=4{,}2\text{ dm}^3$
$4{,}2\text{ l}:7=\mathbf{0{,}6\text{ l}}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

V rovině leží tupý úhel XMY.



Zápis konstrukce:

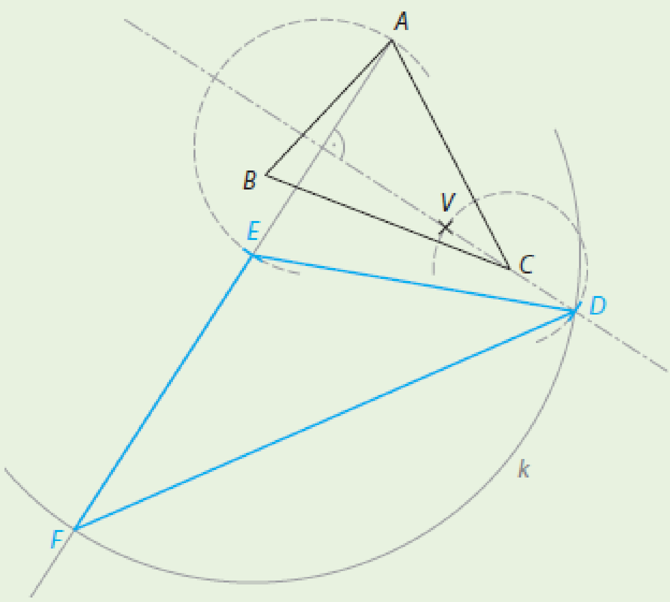
1. p; $p \parallel MX$, vzdálenost p od MX je $2 \cdot |MY|$
2. k; $k(M; r = 4 \cdot |MY|)$
3. O; $O \in k \cap p$
4. P; $P \in p \cap MY$
5. S_{OP}, střed úsečky OP
6. l; $l(M; r = |PS_{OP}|)$
7. N; $N \in l \cap MX$
8. lichoběžník $MNOP$

9 Vrchol N lichoběžníku $MNOP$ leží na polopřímce MX a vrchol P lichoběžníku $MNOP$ leží na polopřímce MY. Vrchol O lichoběžníku $MNOP$ leží uvnitř tupého úhlu XMY. Vrchol O leží ve vzdálenosti $4 \cdot |MY|$ od bodu M a ve vzdálenosti $2 \cdot |MY|$ od ramene MX. Základna MN lichoběžníku $MNOP$ je polovinou základny OP. /Konstrukční úlohy, s. 36/ **max. 2 body**

Sestrojte a popište chybějící vrcholy *O*, *P*, *N* lichoběžníku *MNOP* a lichoběžník narýsujte.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V rovině leží trojúhelník ABC a bod V.



10.1 Zápis konstrukce:

E; $EA \perp VC$,
vzdálenost E od VC
je stejná jako A od VC, $E \neq A$

10.2 Zápis konstrukce:

D; $D \in VC$, $|VC| = |VD|$, $D \neq V$

10.3 Zápis konstrukce:

1. k; $k(E; r = |ED|)$
2. F; $F \in AE \cap k$
3. $\triangle EFD$

10 /Konstrukční úlohy, s. 36/ **max. 3 body**

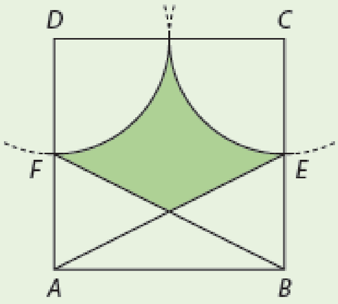
10.1 **V osové souměrnosti s osou *VC* sestrojte obraz bodu *A* a označte ho *E*.**

10.2 **Ve středové souměrnosti se středem *C* sestrojte obraz bodu *V* a označte ho *D*.**

10.3 Trojúhelník DEF je rovnoramenný se základnou DF. Vrchol F leží na polopřímce AE.
Sestrojte chybějící vrchol *F* trojúhelníku *DEF* a trojúhelník narýsujte.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Obvod čtverce *ABCD* je 8 dm.



11 **Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (11.1–11.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).** /Rovinné útvary, s. 49/ **max. 4 body**

		A	N
11.1	Délka úsečky *AE* je menší než 5 dm.	☒	☐
11.2	Obsah vybarvené části zaokrouhlený na celé jednotky je 93 cm^2.	☒	☐
11.3	Obvod vybarvené části je menší než 5 dm.	☐	☒

11.1

$$|AE|^2 = 2^2 + 1^2$$
$$|AE| = \sqrt{4+1}\text{ dm} = \sqrt{5}\text{ dm}$$

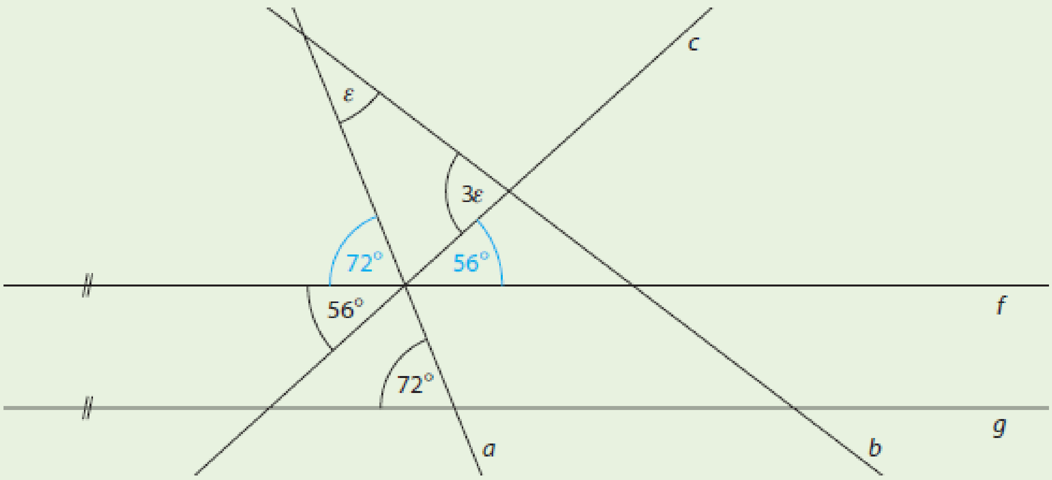
11.2

$$S = \left(2^2 - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} - \frac{2\cdot 1}{2} - \frac{1\cdot 1}{2}\right)\text{dm}^2 = (4 - 1{,}57 - 1 - 0{,}5)\text{ dm}^2 = 0{,}93\text{ dm}^2 = 93\text{ cm}^2$$

11.3

$$o = \left(\pi \cdot 1 + \sqrt{5}\right)\text{dm} \doteq \left(3{,}14 + \sqrt{5}\right)\text{dm} > 5\text{ dm}$$

V rovině jsou dány přímky *a*, *b*, *c*, *f*, *g*. Přímky *f*, *g* jsou rovnoběžky.



12 **Jaká je velikost úhlu ε?** /Úhly, s. 46/ **2 body**
(Velikost úhlu neměřte, ale vypočtěte.)

A) 32°
B) 46°
C) 52°
D) 64°
E) žádná z uvedených

$$\varepsilon + 3\cdot\varepsilon + (180° - 56° - 72°) = 180°$$
$$4\cdot\varepsilon = 128°$$
$$\varepsilon = 32°$$

Správná odpověď je **A**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Nádrž tvaru kvádru má rozměry 40 cm, 50 cm a 80 cm. Nádrž může být postavena třemi různými způsoby. Hladina vody v nádrži je 10 cm pod horním okrajem nádrže.

13 **Z kolika procent je nádrž naplněna v případě, že je v ní největší možné množství vody?** /Tělesa, s. 53/ **2 body**

A) méně než 75 %   B) 75 %   C) 80 %   D) 85 %   E) více než 85 %

Největší množství vody bude v nádrži, bude-li kvádr postaven na podstavě s co nejmenším obsahem.

Objem vody pak bude $(40 \cdot 50) \cdot 70\ \text{cm}^3 = 140\,000\ \text{cm}^3$.

Objem celé nádrže je $(40 \cdot 50) \cdot 80\ \text{cm}^3 = 160\,000\ \text{cm}^3$.

$160\,000\ \text{cm}^3$ .... 100 %
$140\,000\ \text{cm}^3$ .... x %

$$\frac{x}{100} = \frac{140\,000}{160\,000}$$

$$x = \frac{140\,000 \cdot 100}{160\,000}\ \% = \frac{1\,400}{16}\ \% = \frac{700}{8}\ \% = 87{,}5\ \%$$

Správná odpověď je **E**.

Dva sešity stojí stejně jako tři pera. Dva sešity a jedno pero stojí dohromady x Kč.

14 **Který z následujících výrazů udává v korunách cenu dvou per a jednoho sešitu?** /Slovní úlohy, s. 21/ **2 body**

A) $\frac{1}{2}x$ B) $\frac{2}{3}x$ C) $\frac{5}{6}x$ D) $\frac{7}{8}x$ E) $\frac{8}{7}x$

s .... cena sešitu
p .... cena pera

$$2s = 3p$$
$$2s + p = x$$
$$4p = x$$
$$p = \frac{x}{4}$$

$$s = \frac{3}{2} \cdot p = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{4} = \frac{3}{8}x$$

Cena dvou per a jednoho sešitu je:

$$2p + s = 2 \cdot \frac{x}{4} + \frac{3}{8}x = \frac{4x + 3x}{8} = \frac{7}{8}x$$

Správná odpověď je **D**.

15 **Přiřaďte ke každé úloze (15.1–15.3) odpovídající výsledek (A–F).** /Procenta, s. 26/ **max. 6 bodů**

A) méně než 30 % B) 30 % C) 35 % D) 37 % E) 40 % F) více než 40 %

15.1 Kvůli nepříznivému počasí zkrátili pořadatelé trasu běžeckého závodu z původních 48 km na 31 200 m.
O kolik % byla trasa závodu zkrácena oproti původní délce? C

48 km .... 100 %
31,2 km .... x %

$$\frac{x}{100} = \frac{31{,}2}{48}$$

$$x = \frac{3\,120}{48}\ \% = \frac{390}{6}\ \% = 65\ \%$$

100 % − 65 % = 35 %

Správná odpověď je **C**.

A) méně než 30 % B) 30 % C) 35 % D) 37 % E) 40 % F) více než 40 %

15.2 Výrobek byl zlevněn nejprve o 30 % ceny, později ještě o 10 % z nové ceny.
Kolik % původní ceny činila celková sleva? D

100 % .... x Kč
70 % .... $0{,}7x$ Kč

100 % .... $0{,}7x$ Kč
90 % .... $0{,}9 \cdot 0{,}7x$ Kč $= 0{,}63x$ Kč

Výrobek po dvojí slevě stál 63 % původní ceny, byl tedy zlevněn o 37 % původní ceny.

Správná odpověď je **D**.

15.3 Hmotnost čerstvého ovoce byla 18 kg.
Za několik dní se hmotnost ovoce sušením zmenšila o 12 600 g.
Na kolik % původní hmotnosti se snížila hmotnost ovoce? B

18 kg .... 100 %
5,4 kg .... x %

18 kg − 12 600 g = 18 kg − 12,6 kg = 5,4 kg

$$\frac{x}{100} = \frac{5{,}4}{18}$$

$$x = \frac{540}{18}\ \% = 30\ \%$$

Správná odpověď je **B**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

V počítačové hře jezdí na dráze dlouhé 10 km pět aut označených písmeny A, B, C, D, E.
Dráha není tvořena uzavřeným okruhem a nikde se nekříží.
Dráha je rozdělena na kilometrové úseky, tj. první úsek zahrnuje vzdálenosti od 0 m do 1 000 m od startu, druhý úsek zahrnuje vzdálenosti od 1 000 m (včetně) do 2 000 m od startu atd.

- Každé auto jezdí konstantní rychlostí.
- Auta startují ze stejného místa v pořadí podle abecedy v minutových intervalech a každé z nich jede jinou rychlostí.
- První vyjíždí auto A, které jede rychlostí 40 km/h.
- Pokud by na dráze jela jen auta A a B, dostihlo by auto B auto A po 21 minutách jízdy auta A.
- Auto C jede o 6 km/h rychleji než auto B.
- Auto D jede o 6 km/h rychleji než auto C.
- Auto E jede o 6 km/h rychleji než auto D.
- Jestliže se na některém úseku dráhy setkají více než dvě auta, tak všechna tato auta zmizí a již nezávodí.

/Nestandardní úlohy, s. 58/ **max. 4 body**

16

16.1 Určete, jakou rychlostí jezdí auto B.

16.2 Vypočtěte v km, v jaké vzdálenosti od startu by se nacházela auta A, B, C po 13 minutách jízdy auta A, pokud by na dráze byla jen tato tři auta. Výsledek zaokrouhlete na desetiny km.

16.1 $s_A = s_B: \quad v_A \cdot t_A = v_B \cdot t_B$

$$40 \cdot \frac{21}{60} = v_B \cdot \frac{20}{60}$$

$$v_B = \frac{40 \cdot 21}{20}\ \text{km/h} = 42\ \text{km/h}$$

Auto B jezdí rychlostí **42 km/h**.

16.2 $s_A = v_A \cdot \frac{13}{60}\ \text{km} = 40 \cdot \frac{13}{60}\ \text{km} = \frac{52}{6}\ \text{km}$

$s_A \doteq \mathbf{8{,}7\ km}$

$s_B = v_B \cdot \frac{12}{60}\ \text{km} = 42 \cdot \frac{12}{60}\ \text{km} = 0{,}7 \cdot 12\ \text{km}$

$s_B = \mathbf{8{,}4\ km}$

$s_C = v_C \cdot \frac{11}{60}\ \text{km} = 48 \cdot \frac{11}{60}\ \text{km} = 0{,}8 \cdot 11\ \text{km}$

$s_C = \mathbf{8{,}8\ km}$

Po 13 minutách jízdy auta A je auto A ve vzdálenosti přibližně 8,7 km od startu, auto B ve vzdálenosti 8,4 km od startu a auto C ve vzdálenosti 8,8 km od startu.

16.3 **Určete, které auto dojede do cíle první.**

(Úlohu lze řešit úvahou, ale zde uvedeme početní řešení.)

Auto	Rychlost (v km/h)	Doba jízdy od startu auta A (v h)
A	40	t_A
B	42	$t_A - \frac{1}{60}$
C	48	$t_A - \frac{2}{60}$
D	54	$t_A - \frac{3}{60}$
E	60	$t_A - \frac{4}{60}$

Vypočteme, za kolik minut od startu auta A by se každá dvě auta setkala, kdyby byla na dráze sama (pravý sloupec) a výsledek zapíšeme do přehledné tabulky:

	A	B	C	D	E
A	—	21 min	12 min	11,57 min	12 min
B		—	9 min	10 min	11 min
C			—	11 min	12 min
D				—	13 min
E					—

Z tabulky vidíme, že po 12 minutách od startu auta A se setkají 3 auta A, C a E. To znamená, že podle pravidel zmizí a na dráze zůstanou pouze auta B a D. Z tabulky dále vidíme, že auto D dohoní auto B za 10 minut od startu auta A a pak jej předjede.

Tedy první do cíle dojede **auto D.**

$s_A = s_C$: $40 \cdot t_A = 48 \cdot \left(t_A - \frac{2}{60}\right)$

$\frac{96}{60} = 8 \cdot t_A \rightarrow t_A = \frac{12}{60}\ \text{h} = 12\ \text{min}$

$s_A = s_D$: $40 \cdot t_A = 54 \cdot \left(t_A - \frac{3}{60}\right)$

$\frac{162}{60} = 14 \cdot t_A \rightarrow t_A \doteq \frac{11{,}57}{60}\ \text{h} = 11{,}57\ \text{min}$

$s_A = s_E$: $40 \cdot t_A = 60 \cdot \left(t_A - \frac{4}{60}\right)$

$4 = 20 \cdot t_A \rightarrow t_A = \frac{4}{20}\ \text{h} = 12\ \text{min}$

$s_B = s_C$: $42 \cdot \left(t_A - \frac{1}{60}\right) = 48 \cdot \left(t_A - \frac{2}{60}\right)$

$\frac{-42+96}{60} = 6 \cdot t_A \rightarrow t_A = \frac{9}{60}\ \text{h} = 9\ \text{min}$

$s_B = s_D$: $42 \cdot \left(t_A - \frac{1}{60}\right) = 54 \cdot \left(t_A - \frac{3}{60}\right)$

$\frac{-42+162}{60} = 12 \cdot t_A \rightarrow t_A = \frac{10}{60}\ \text{h} = 10\ \text{min}$

$s_B = s_E$: $42 \cdot \left(t_A - \frac{1}{60}\right) = 60 \cdot \left(t_A - \frac{4}{60}\right)$

$\frac{-42+240}{60} = 18 \cdot t_A \rightarrow t_A = \frac{11}{60}\ \text{h} = 11\ \text{min}$

$s_C = s_D$: $48 \cdot \left(t_A - \frac{2}{60}\right) = 54 \cdot \left(t_A - \frac{3}{60}\right)$

$\frac{-96+162}{60} = 6 \cdot t_A \rightarrow t_A = \frac{11}{60}\ \text{h} = 11\ \text{min}$

$s_D = s_E$: $54 \cdot \left(t_A - \frac{3}{60}\right) = 60 \cdot \left(t_A - \frac{4}{60}\right)$

$\frac{-162+240}{60} = 6 \cdot t_A \rightarrow t_A = \frac{13}{60}\ \text{h} = 13\ \text{min}$

$s_C = s_E$: $48 \cdot \left(t_A - \frac{2}{60}\right) = 60 \cdot \left(t_A - \frac{4}{60}\right)$

$\frac{-96+162}{60} = 12 \cdot t_A \rightarrow t_A = \frac{12}{60}\ \text{h} = 12\ \text{min}$